المستوي في الفضاء

الشكل العام لمعادلة مستوي في الفضاء من الشكل: $px + qy + rz + h = 0$

حيث الناظم على المستوي هو: $\vec{n}(p, q, r)$ وبعد المستوي عن مبدا الإحداثيات هو h

ملاحظة من أجل الرسم:

لتعيين النقاط التي يقطع بها المستوي المحاور الإحداثية نقوم ب :

$px + qy + rz = -h$ حيث: $h \neq 0$ ثم نقسم على : $(-h)$ فيصبح لدينا:

$$\frac{px}{-h} + \frac{qy}{-h} + \frac{rz}{-h} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{h}{p}} + \frac{y}{-\frac{h}{q}} + \frac{z}{-\frac{h}{r}} = 1$$

حيث: $a = -\frac{h}{p}, b = -\frac{h}{q}, c = -\frac{h}{r}$ ومنه نجد: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ هي معادلة المستوي في الفضاء

ويقطع المحاور الإحداثية ox, oy, oz على الترتيب في النقاط التالية :

$(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$

ولشرح كيفية هذه النقاط : نعوض في معادلة المستوي $y = 0, z = 0$ فيكون لدينا:

$\frac{x}{a} + 0 + 0 = 1 \leftrightarrow x = a$ وبنفس الطريقة نوجد كل النقاط .

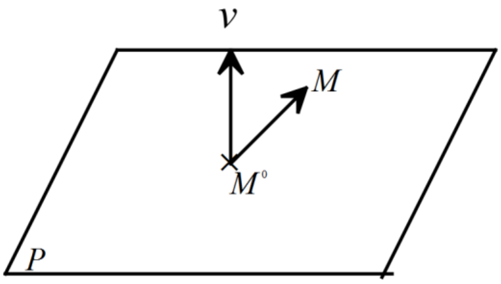
تعيين معادلة مستوي في الفضاء :

لدينا ثلاث حالات رئيسية :

1_ إيجاد معادلة مستوي يمر من نقطة ويعامد منحى متجه:

بفرض **p** مستوي يمر من نقطة معلومة ولتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ويعامد متجه $\vec{v}(p, q, r)$

بفرض أن $M(x, y, z)$ نقطة متحولة من المستوي فإن : $\vec{v} \perp \overrightarrow{M_0M}$



$$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\vec{v}.\overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

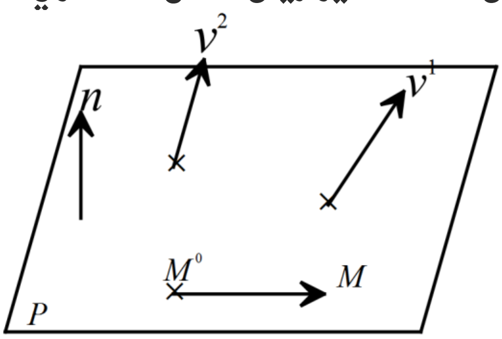
$$px + qy + rz + (-px_0 - qy_0 - rz_0) = 0$$

$$px + qy + rz + h = 0$$

2_ إيجاد معادلة مستوي يمر من نقطة ويوازي منحيي متجهين:

$$\overrightarrow{v_1}(a_1, b_1, c_1) \quad \overrightarrow{v_2}(a_2, b_2, c_2)$$

ليس الشرط أن يكون v_1 يوازي v_2 وهما لا يقعان في المستوي بل إن منحاهما يوازيان منحى المستوي

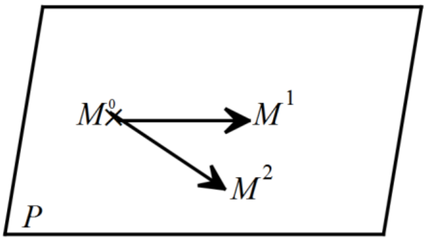


$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

3_ أيجاد معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة:

بفرض **p** مستوي يمر من النقاط: $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_0(x_0, y_0, z_0)$

عندئذ نحصل على المعادلة المطلوبة بفك المحدد:



$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

مثال_1_:

أوجد معادلة المستوي المار من $M_0(1,1,1)$ و $M_2(3,2,4)$ ويوازي منحى المتجه $\vec{v}(3,4,5)$

الحل: بفرض **p** يمر من $M_0(1,1,1)$ ويوازي منحى المتجهين $\overrightarrow{M_0M_2}(2,1,3)$ والمتجه المعلوم $\vec{v}(3,4,5)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-7)-(y-1)(1)+(z-1)(5)=0$$

بعد النقطة عن المستوي p

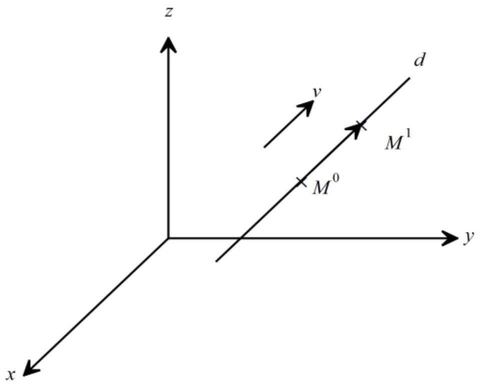
ليكن لدينا النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ولدينا معادلة المستوي $p \equiv px+qy+rz+h=0$

نحسب بعد M_0 عن **p** بالعلاقة التالية:

$$d=\frac{|p(x_0)+q(y_0)+r(z_0)+h|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

المستقيم في الفضاء الثلاثي

لدينا طريقتين لإيجاد معادلة مستقيم في الفضاء:



1_ إيجاد معادلة مستقيم يمر من نقطة ويوازي منحى متجه معلوم :

بفرض **d** مستقيم يمر من $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ويوازي

منحى المتجه $\vec{v}(p,q,r)$

$$\vec{v} \backslash\backslash \overrightarrow{M_0M_1}$$

$$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$\overrightarrow{(M_0M_1)} = \delta.\vec{v}$$

$$(x_1 - x_0), (y_1 - y_0), (z_1 - z_0) = \delta(p, q, r) = \delta p, \delta q, \delta r$$

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = \delta p \\ y_1 - y_0 = \delta q \\ z_1 - z_0 = \delta r \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + \delta p \\ y_1 = y_0 + \delta q \\ z_1 = z_0 + \delta r \end{cases}$$

وهي تمثل المعادلات الوسيطية للمستقيم **d**

$\frac{x_1 - x_0}{p} = \frac{y_1 - y_0}{q} = \frac{(z_1 - z_0)}{r} = \delta$ وهي المعادلات الديكارتية للمستقيم **d**

2_ إيجاد معادلات مستقيم مار من نقطتين :

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $\quad$ $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$M_0\overrightarrow{M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

وهي المعادلات الديكارتية للمستقيم.

أما المعادلات الوسيطية للمستقيم هي:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = \delta$$

$$x - x_0 = \delta(x_1 - x_0)$$

$$y - y_0 = \delta(y_1 - y_0)$$

$$z - z_0 = \delta(z_1 - z_0)$$

سؤال دورة :

برهن أن المستقيمين يقعان في مستوي واحد: $L_1 \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$

$$L_2 \equiv x = 3t + 7, y = 2t + 2, z = -2t + 1$$

ثم أوجد معادلته ؟

L_1 يمر من $M_1(1, -2, 5)$ و L_2 يمر من $M_2(7, 2, 1)$

$\overrightarrow{M_1M_2}(6, 4, -4)$

$\overrightarrow{v_2}(3, 2, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{v_1}(-2, -3, 4)$ أتت هذه الإحداثيات من أمثال t

الشرط اللازم والكافي لكي يكون ثلاث متجهات واقعة في مستوي واحد هو أن يكون الجداء المختلط لهم يساوي الصفر.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}).(\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}) = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$-2R_3 + R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه المتجهات $\overrightarrow{v_2}$, $M_1\overrightarrow{M_2}, \overrightarrow{v_1}$ واقعة في مستوي واحد أي أن L_1, L_2 تقع في مستوي واحد

بفرض P مستوي يمر من M_1 ويوازي منحيي المتجهيين $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ فتكون معادلة المستوي :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ -2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2x + 8y + 5z - 7 = 0$$

تمرين: اكتب المعادلات الوسيطية والديكارتية للمستقيم المار بالنقطة $(1, 5, -2)$

والموازي للمستقيم
$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 7 - 3t \\ z = -6 + 12 \end{cases}$$

المستقيم المعطى يوازي $\vec{v}(4, -3, 12)$ وقد أتينا من هذا الشعاع من معادلة المستقيم من أمثال t

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 4t \\ y - 5 = -3t \\ z + 2 = 12t \end{cases}$$